KENDALI OPTIMAL SISTEM PERSEDIAAN TERHADAP PENINGKATAN BARANG DENGAN FAKTOR DISKON

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

Oleh:

WENI GUSTIANA
11554202561

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2019

LEMBAR PERSETUJUAN

KENDALI OPTIMAL SISTEM PERSEDIAAN TERHADAP PENINGKATAN BARANG DENGAN FAKTOR DISKON

TUGAS AKHIR

Oleh:

WENI GUSTIANA
11554202561

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, 15 November 2019

Ketua Program Studi	**Pembimbing**
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP.19840803 201101 1 005**

LEMBAR PENGESAHAN

KENDALI OPTIMAL SISTEM PERSEDIAAN TERHADAP PENINGKATAN BARANG DENGAN FAKTOR DISKON

TUGAS AKHIR

Oleh:

WENI GUSTIANA
11554202561

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 15 November 2019

Pekanbaru, 15 November 2019
Mengesahkan,

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Ari Pani Desvina, M.Sc.**
Sekretaris	**: Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc.**
Anggota I	**: Mohammad Soleh, M.Sc.**
Anggota II	**: Irma Suryani, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 15 November 2019

Yang membuat pernyataan,

WENI GUSTIANA

11554202561

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Laa hawla wa laa quwwata illa billah

"Tiada daya dan upaya selain dengan kehendak Allah"

Maka nikmat Tuhan mu yang manakah yang kamu dustakan?

(QS. Ar-Rahman:13)

Yang utama dari segalanya…
Sembah sujud serta syukur kepada Allah SWT. Taburan cinta dan kasih sayangmu telah memberikanku kekuatan, membekaliku dengan ilmu serta memperkenalkanku dengan cinta. Atas karunia serta kemudahan yang engkau berikan akhirnya skripsi yang sederhana ini dapat terselesaikan. Shalawat dan salam selalu terlimpahkan keharibaan Rasulullah SAW. Kupersembahkan karya sederhana ini kepada orang yang sangat kukasihi dan kusayangi.

Ibunda Elvina dan Ayahanda Abuzar (Alm) Tercinta…
Sebagai tanda bukti, hormat dan rasa terima kasih yang tiada terhingga kupersembahkan karya sederhana ini kepada ibu dan ayah yang telah memberikan kasih sayang, segala dukungan, dan cinta kasih yang tiada terhingga yang tiada mungkin dapat kubalas hanya dengan selembar kertas yang bertulisan kata cinta dan persembahan. Semoga ini menjadi langkah awal untuk membuat ibu dan ayah bahagia karna kusadar selama ini belum bisa berbuat yang lebih. Untuk ibu dan ayah yang selalu membuatku termotivasi dan selalu menyirami kasih sayang,selalu menasehatiku menjadi lebih baik.
Terima Kasih Ibu… Terima Kasih Ayah.

Kakak (Zarnia, Amd.Kep), Adik (M. Zikri), dan Saudara-Saudari
Untuk kakak, adik, serta saudara-saudariku tiada paling mengharukan saat kumpul bersama kalian, walaupun sering bertengkar tapi hal itu selalu menjadi warna yang tak akan bisa tergantikan. Terima kasih atas doa dan bantuan kalian selama ini, hanya karya sederhana ini yang dapat aku persembahkan.
Maaf belum bisa jadi panutan seutuhnya.

Dosen Pembimbing Tugas Akhirku…
Bapak Nilwan Andiraja S.Pd,M.Sc terima kasih saya sudah dibantu banyak selama ini, sudah dinasehati, sudah diajari.
Saya tidak akan lupa atas bantuan dan kesabaran dari bapak selama ini…

BY. WENI GUSTIANA

KENDALI OPTIMAL SISTEM PERSEDIAAN TERHADAP PENINGKATAN BARANG DENGAN FAKTOR DISKON

WENI GUSTIANA
NIM : 11554202561

Tanggal Sidang : 15 November 2019
Tanggal Wisuda : September 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Pada penelitian yang telah diteliti sebelumnya, dibuat oleh Tadj (2008). Kemudian penelitian ini dilakukan dengan menambahkan faktor diskon $e^{-\theta t}$ pada fungsi tujuan yang diperoleh dari penelitian Daliani (2012). Oleh karena itu, tugas akhir ini membahas tentang persoalan kendali optimal dari sistem persediaan dengan kasus peningkatan barang untuk waktu berhingga. Untuk menyelesaikan persamaan yang mengalami peningkatan maka dapat menggunakan teori kendali optimal. Berdasarkan persamaan differensial dinamik dan fungsi tujuan yang diberikan dapat dibentuk Persamaan Hamilton dan Lagrange. Selanjutnya ditentukan persamaan tingkat persediaan yang optimal dan persamaan tingkat produksi yang optimal. Kemudian dianalisa kestabilan, berdasarkan contoh yang diberikan maka diperoleh bahwa kurva tingkat persediaan meningkat pada waktu akhir yang telah ditentukan.

Kata kunci: *Faktor diskon, kendali, kestabilan, peningkatan, sistem persediaan, sistem persamaan differensial.*

OPTIMAL CONTROL IN INVENTORY SYSTEM OF AMELIORATING ITEMS WITH DISCOUNT FACTOR

WENI GUSTIANA
NIM : 11554202561

Date Of Final Exam : November 15th 2019
Date Of Graduation : September 2020

Mathematics Department
Faculty of Sciences and Technology
Islamic State University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

In previous research, Tadj (2008). Then this research was done by adding the discount factor $e^{-\theta t}$ *to the objective function obtained from the Daliani study (2012). Therefore, this final project discusses the optimal control issue of the inventory system with the case of the ameliorating of finite time . To solve the ameliorating equation then it can use the optimum control theory. Based on the dynamic differential equation and objective function given can be formed Hamilton equation and Lagrange. The optimal inventory equation is then determined, and the optimum production equation. Then analyzed the stability, based on the given example it is obtained that the inventory level curve increase at the specified end time.*

***Keywords** : Ameliorating, control, differential equation system, discount factor, inventory system, stability.*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya dengan judul "**KENDALI OPTIMAL SISTEM PERSEDIAAN TERHADAP PENINGKATAN BARANG DENGAN FAKTOR DISKON**". Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana. Selanjutnya limpahan shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad SAW, sebagai pembawa petunjuk bagi seluruh umat manusia.

Selanjutnya, dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini penulis tidak terlepas dari batuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu sudah sepantasnya penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta, Ayah Abuzar (Alm) dan Ibu Elvina yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus dan terus melangkah, pelajaran hidup juga materi yang tak mungkin bisa terbalas. Jasa-jasanya selalu kukenang hingga akhir hayatku dan semoga Allah menjadikan jasa-jasamu sebagai amalan soleh, Amin. Ucapan terima kasih selanjutnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. KH. Akhmad Mujahidin, M.Ag, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc, selaku Pembimbing yang telah banyak membantu, mendukung, mengarahkan dan membimbing penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc, selaku Penguji I yang telah banyak memberikan kritik serta saran kepada penulis.
6. Ibu Irma Suryani, M.Sc, selaku Penguji II yang telah banyak memberikan kritik serta saran kepada penulis.

7. Ibu Rahmadeni M.Si, selaku Pembimbing Akademik yang selalu memberikan motivasi dan dukungan selama penulis di Jurusan Matematika.
8. Semua Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Terima kasih atas semua saran yang diberikan kepada penulis.
9. Semua kakak tingkat saya, teman-teman, dan adik junior saya yang juga memberi motivasi kepada saya dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Akhirnya, dalam penyusunan dan penulisan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin untuk menghindari kesalahan. Tapi seperti tak ada gading yang tak retak. Penulis mengharapkan kepada pembaca tugas akhir ini agar memberikan saran dan kritik. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan konstribusi yang bermanfaat, Amin.

Pekanbaru, 28 Oktober 2019

Penulis

Weni Gustiana

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$I(t)$: tingkat fungsi persediaan.

$P(t)$: tingkat fungsi produksi.

I_0 : tingkat nilai awal persediaan.

$v(t)$: selisih dan rata-rata fungsi kenaikan dan kemerosotan.

$\hat{P}$: tingkat produksi tujuan

$\hat{I}$: tingkat persediaan tujuan

⍰ : koefisien biaya penyimpanan

K : koefisien biaya produksi

M : tingkat persediaan maksimal

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah persediaan termasuk salah satu masalah yang berkembang secara pesat. Persediaan didefinisikan sebagai barang yang disimpan untuk digunakan atau dijual pada periode mendatang (Kusuma, 2009). Persediaan dapat mengalami penurunan dan juga dapat mengalami peningkatan. Penurunan persediaan dapat menghambat kelancaran proses produksi sehingga kesulitan memenuhi permintaan konsumen. Begitu sebaliknya, peningkatan persediaan merupakan pemborosan biaya karena menyebabkan tingginya biaya penyimpanan barang di gudang.

Lebih memperjelas tentang penerapan teori kendali pada persediaan bisa dilihat dalam jurnal penelitian yang berkaitan dengan hal tersebut yaitu penelitian yang dilakukan oleh Tadj dkk (2008) "*Optimal Control of an Inventory System with Ameliorating and Deteriorating Items*". Dalam penelitian tersebut dibahas mengenai persamaan persediaan optimal untuk kasus peningkatan dan penurunan barang. Pada model diferensial dinamiknya, tingkat produksi ditambah dengan selisih kenaikan dan kemerosotan dikali dengan tingkat persediaan barang. Pada penelitiannya, proses penentuan fungsi kendali didapat dengan membentuk persamaan Hamilton dan Lagrange.

Kemudian penelitian lain dengan pembahasan yang sama juga dilakukan oleh Affandi dkk (2015) "Kendali Optimal dari Sistem *Inventory* dengan Peningkatan dan Penurunan Barang" yang membahas tentang pengendalian persediaan barang yang optimal saat mengalami peningkatan dan penurunan barang. Pada model diferensial dinamiknya, dengan tingkat produksi ditambah dengan selisih kenaikan dan kemerosotan ditambah dengan tingkat persediaan barang. Kemudian dibentuk persamaan Hamilton dan Lagrangenya dan menyelesaikan bentuk persediaan barang tersebut menggunakan teknik kendali optimal. Selanjutnya, Affandi dkk (2012) pada penelitiannya tentang "Penerapan Teori Kendali pada Masalah Inventori". Penelitian tersebut membahas mengenai persediaan barang dimana penurunan barang dan kerusakan barang di perhitungkan sebagai fungsi waktu yang sudah tersedia.

Sementara itu penelitian sistem dinamik oleh Syahfitri (2018) yang membahas "Aplikasi Teori Kendali pada Masalah Persediaan yang Mengalami Peningkatan Barang untuk Waktu Diskrit". Penelitian tersebut digunakan untuk mencari tingkat produksi yang optimal dengan menggunakan Persamaan Diferensial Diskrit. Solusi dari Persamaan Diferensial Diskrit digunakan untuk membentuk fungsi kendali model persediaan barang yang mengalami peningkatan untuk waktu diskrit, dan terakhir pada penelitiannya Syahfitri menganalisa kestabilan model persediaan.

Pada penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Maiza (2016) yang membahas "Model Linear Kuadratik untuk Sistem Deskriptor Berindeks Satu dengan Faktor Diskon dan *Output Feedback*", diperoleh bahwa terdapat faktor diskon yang dapat dikenakan pada fungsi tujuan dalam penelitian ini. Beberapa penelitian yang terkait pada pembahasan faktor diskon juga dapat diperoleh pada penelitian Daliani (2012) "Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal Kontinu Yang Memuat Faktor Diskon". Selanjutnya dari dua penelitian di atas, maka tujuan diberikan faktor diskon agar dapat menarik minat konsumen serta mempercepat daya jual, sehingga mengurangi persediaan barang.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik melakukan penelitian mengenai sistem persediaan untuk peningkatan barang berdasarkan jurnal Affandi dkk dengan faktor diskon yang didapat dari penelitian Maiza dan Daliani. Sehingga penulis mengambil judul **"Kendali Optimal Sistem Persediaan Terhadap Peningkatan Barang dengan Faktor Diskon"**.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tugas ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan tingkat produksi barang untuk sistem persediaan barang yang mengalami peningkatan dengan faktor diskon ?
2. Bagaimana analisis kestabilan bentuk sistem persediaan barang yang mengalami peningkatan dengan faktor diskon ?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam tugas tugas akhir ini sebagai berikut:

1. Permasalahan hanya difokuskan pada sistem persediaan barang yang mengalami peningkatan untuk waktu berhingga.
2. Fungsi tujuan berbentuk kuadratik untuk waktu berhingga.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penelitian tugas akhir ini sebagai berikut:

1. Mendapatkan persamaan tingkat produksi barang untuk sistem persediaan barang yang mengalami peningkatan.
2. Mendapatkan kestabilan model matematika dari persediaan barang yang mengalami peningkatan.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Sebagai wawasan untuk menambah pengetahuan tentang sistem kendali.
2. Memberi konstribusi bagi pembaca untuk membantu mempelajari dan memperdalam masalah kestabilan tentang persediaan barang yang mengalami peningkatan.
3. Sebagai *literature* penunjang khususnya bagi mahasiswa yang menempuh mata kuliah teori kendali.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup 5 bab yaitu:

BAB I Pendahuluan

Pendahuluan menguraikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, serta sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Landasan teori berisi tentang hal-hal yang dijadikan sebagai dasar teori untuk mengembangkan petulisan tugas akhir.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan tentang metode-metode yang dilakukan agar dapat memperoleh hasil yang dibutuhkan dalam penulisan tugas akhir ini.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara untuk mendapatkan hasil penelitian tersebut.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta

Bentuk umum persamaan diferensial biasa nonhomogen diberikan sebagai berikut:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.1}$$

Selanjutnya dimisalkan $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan homogen

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) dapat diselesaikan dengan memisalkan $y = e^{rx}$, sehingga akan diperoleh

$$a\frac{d^2(e^{rx})}{dx^2} + b\frac{(e^{rx})}{dx} + ce^{rx} = 0$$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Oleh karena, $e^{rx} = 0$ maka $y(x) = e^{rx}$ merupakan penyelesaian Persamaan (2.2) jika dan hanya jika nilai r memenuhi karakteristik,

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.3}$$

Peyelesaian dari Persamaan karakteristik (2.3) adalah

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

dan

$$r_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

Penyelesaian khusus dari persoalan persamaan diferensial linier orde dua dengan persamaan karakteristik pada Persamaan (2.3) bergantung pada nilai diskriminan.

Adapun bentuk-bentuk penyelesaian berdasarkan nilai diskriminan adalah sebagai berikut:

a. Akar-akar Real dan Berbeda ($b^2 - 4ac > 0$)

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah real dan berbeda, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.2) adalah:

$$y_c(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_1 e^{r_2 x} \tag{2.4}$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

b. Akar-akar Berulang ($b^2 - 4ac = 0$)

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah sama ($r_1 = r_2$), maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.2) adalah

$$y_c(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x} \tag{2.5}$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

c. Akar-akar Imajiner ($b^2 - 4ac < 0$)

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah bilangan kompleks ($r_1 = \alpha + i\beta \; dan \; r_2 = \alpha - i\beta$), maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.2) adalah

$$y_c(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x) \tag{2.6}$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

Lebih lanjut, $y_p(x)$ merupakan penyelesaian untuk persamaan nonhomogen. Maka penyelesaian umum dari Persamaan nonhomogen (2.1) dapat ditulis dalam bentuk

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \tag{2.7}$$

Contoh 2.1

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial biasa nonhomogen berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

Kemudian dibentuk persamaan karakteristik untuk persamaan homogennya yaitu:

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)(r + 2) = 0$$

Maka diperoleh penyelesaian:

$$y_c(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$$

Selanjutnya untuk penyelesain $y_p(x)$ diberikan oleh:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Sehingga,

$$y_p'(x) = 2Ax + B \text{ dan } y_p''(x) = 2A$$

Untuk menentukan nilai A, B dan C maka disubsitusikan nilai-nilai $y_p(x), y_p'(x)$ dan $y_p''(x)$ ke dalam persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$ sehingga diperoleh:

$$2A + 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

Dengan menggunakan kesamaan koefisien untuk persamaan diatas maka, diperoleh nilai $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{2},$ dan $C = \frac{3}{8}$, sehingga:

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

Jadi, penyelesaian umum untuk persoalan diatas adalah menjumlahan persamaan $y_c(x)$ dengan persamaan $y_p(x)$ sehingga diperoleh:

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

2.2 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Olsder, 1994) diberikan persamaan diferensial orde1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $x(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\bar{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Dari definisi maka diberi contoh sebagai berikut:

Contoh 2.2:

Tentukan titik ekuilibrium dari persamaan berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x + 1$$

Penyelesaian:

Diketahui

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x + 1$$

maka diperoleh titik ekuilibriumnya:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = -1$$

Definisi titik ekuilibrium di atas diberikan dengan tujuan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi tentang kestabilan sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists\, \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibirium $\bar{\boldsymbol{x}}$ tak stabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil.

Untuk lebih memahami definisi di atas, maka diberikan contoh berikut:

Contoh 2.3 :

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial dinamik $x = x + 1$ dengan titik ekuilibrium $\bar{x} = -1$ dan $x(0) = x_0$

Penyelesaian:

Sebelum dianalisa kestabilan, maka diberi solusi sebagai berikut:

$$\dot{x} = x + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = x + 1$$

$$\frac{dx}{x+1} = dt$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int dt$$

$$\ln|x+1| = t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga:

$$\ln|x+1| - c = t$$

$$\ln|x+1| - \ln|x_0+1| = t$$

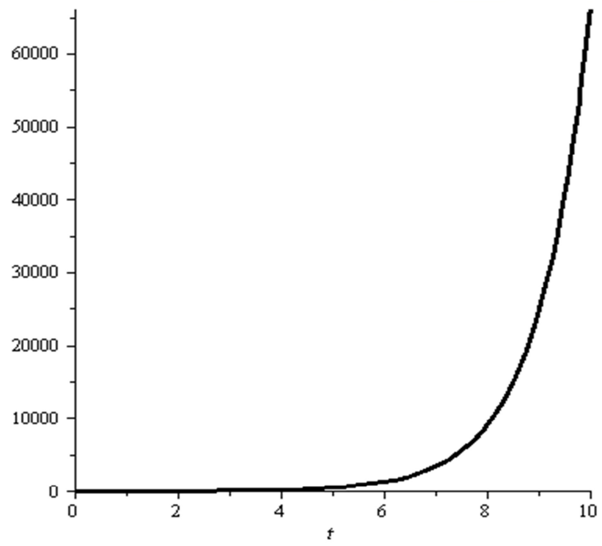
$$\ln\frac{x+1}{x_0+1} = t$$

$$\frac{x+1}{x_0+1} = e^t$$

$$x + 1 = (x_0+1)e^t$$

$$x = (x_0+1)e^t - 1$$

Selanjutnya, untuk melihat kecenderungan nilai solusi $(x_0+1)e^t - 1$ dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 2.1 Grafik $x(t)$ untuk $t \to 10$

Berdasarkan Gambar 2.1, untuk $t \to 10$ solusi $x \to \infty$, sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk $\dot{x} = x + 1$ tidak stabil karena solusinya menuju tak berhingga.

2.3 Prinsip Maksimum Sistem Kendali

Menurut Shety (1985) diberikan persamaan fungsi kendali secara umum waktu kontinu sistem dinamik dengan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x,u,t),\; x(0) = x_0. \tag{2.8}$$

dengan u(t) fungsi kendali $t \in (0,T)$,

Kemudian persamaan fungsi tujuannya yaitu:

$$J = \int_0^t F(x,u,t)dt. \tag{2.9}$$

Selanjutnya dengan fungsi tujuannya dibatasi pada $[0,t]$, sehingga fungsi F tergantung pada state x dan kendali u berdasarkan waktu $[0,t]$.

Untuk membentuk fungsi kendali u maka diperlukan fungsi Hamilton sebagai berikut:

$$H(x,u,\lambda,t) = F(x,u,t) + \lambda f(x,u,t). \tag{2.10}$$

Dan juga dibutuhkan fungsi Langrange yaitu:

$$L(x,u,\lambda,\mu,t) = H(x,u,\lambda,t) + \mu g(x,u,t). \tag{2.11}$$

Kemudian berdasarkan Persamaan (2.11) diatas dibentuk persamaan diferensial

$$\dot{\lambda} = -L_x(x,u,\lambda,\mu,t) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \tag{2.12}$$

dengan ketentuannya $\mu(t) \geq 0, \mu(t)f = 0.$

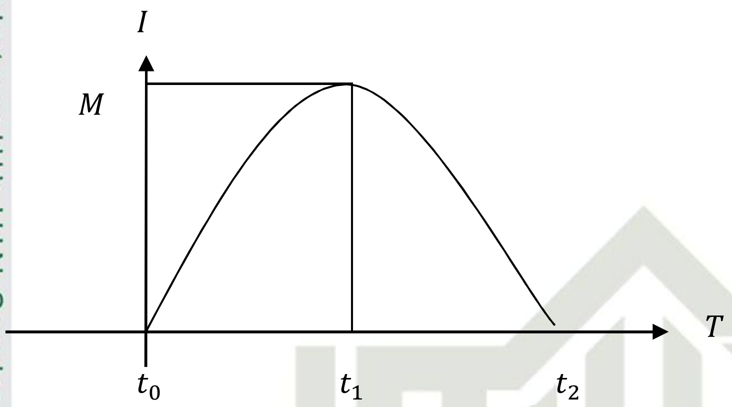
2.4 Sistem Persediaan Barang

Pada sub-bab ini dibentuk dua sistem persediaan barang berdasarkan Tadj (2008).

2.4.1 Kendali Optimal pada Masalah Persediaan Barang

Pembentukan sistem persediaan pada kasus ini ditinjau saat terjadi peningkatan dan penurunan barang. Di asumsikan bahwa fase pertama dari t_0 hingga t_1 untuk tingkat persedian yang meningkat, kemudian fase kedua yaitu t_1

hingga t_2 untuk tingkat persediaan yang menurun. Berikut ini digambarkan model persediaan :



Gambar 2.2 Sistem Persediaan Menurut Tadj (2008)

Berdasarkan batasan masalah yang telah diberikan maka yang dibahas pada penelitian ini hanya untuk kasus peningkatan barang. Oleh karna itu kurva pada Gambar 2.2 yang ditunjukkan untuk selang waktu $[t_0, t_1]$. Selanjutnya berdasarkan jurnal yang dibahas Affandi (2015) maka didefinisikan persamaan differensial dinamik untuk kasus peningkatan barang yaitu:

$$\dot{I}(t) = P(t) + v(t)I(t), \qquad t \in [t_0, t_1] \qquad (2.13)$$

dengan $v(t) = m(t) - \theta(t)$, $P(t) \geq 0$. Kemudiaan untuk menjamin bahwa jumlah persediaan meningkat dari 0 hingga t_1 maka untuk lebih lanjut berlaku:

$$P(t) + v(t)I(t) > 0, \qquad t \in [t_0, t_1] \qquad (2.14)$$

dengan

$I(t)$: tingkat fungsi persediaan.

$P(t)$: tingkat fungsi produksi.

I_0 : tingkat nilai awal persediaan.

$m(t)$: rata-rata fungsi kenaikan.

$\theta(t)$: rata-rata fungsi kemerosotan.

v(t) : selisih dan rata-rata fungsi kenaikan dan kemerosotan.

Fungsi tujuan dari sistem persediaan barang yaitu sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\square\left(I(t) - \hat{I}\right)^2 + K(P(t) - \hat{P})^2\right) dt \qquad (2.15)$$

dengan

$\hat{P}$: tingkat produksi tujuan

$\hat{I}$: tingkat persediaan tujuan

□ : koefisien biaya penyimpanan

K : koefisien biaya produksi

Menurut **(Tadj, 2008)** untuk mencari tingkat produksi maka didefinisikan persamaan berikut :

$$H = -\frac{1}{2}\left(□(I - \hat{I})^2 + K(P - \hat{P})^2\right) + \lambda g \qquad (2.16)$$

dengan

$$g = P(t) + v(t)I(t) \quad t \in [t_0, t_1] \qquad (2.17)$$

dan fungsi Lagrange adalah sebagai berikut:

$$L = -\frac{1}{2}\left(□\left(I - \hat{I}\right)^2 + K(P - \hat{P})^2\right) + (\lambda + \mu)g, \;\; t \in [t_0, t_1] \qquad (2.18)$$

Selanjutnya berdasarkan penelitian Daliani (2012), maka pada Persamaan (2.15) diberikan faktor diskon $e^{-\theta t}$, dengan θ dalam bentuk persentase.

2.5 Bentuk Kuadratik

Pada bagian ini diberikan bentuk kuadratik yaitu:

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \qquad (2.19)$$

dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j. Kemudian untuk $\boldsymbol{x}^T = [x_1, x_2, \ldots x_n]$ maka persamaan (2.19) dapat diuraikan menjadi:

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \qquad (2.20)$$

Persamaan (2.7) disebut bentuk kuadratik dengan n banyak variabel $x_1, x_2, \ldots x_n$ dengan $i = j, j = n$ dan $c_{ij} \epsilon$ □. Menurut (**Lewis, 1995**) sifat definit dari persamaan kuadratik (2.19) dapat diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari matriks A. Jika A matriks simetri berukuran n x n dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi:

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i >$ 0 untuk semua *i*
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq$ 0 untuk semua *i*

3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua *i*
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua *i*.
5. Undefinit jika tidak memenuhi 4 sifat di atas.

Untuk memahami penjelasan di atas maka diberi contoh sebagai berikut:

Contoh 2.4:

Ubahlah $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -4x_ix_j$ ke bentuk kuadratik dan tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian:

Bentuk kuadratik sebagai berikut

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -4x_ix_j = -4x_1x_1 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 - 4x_2x_2$$
$$= -4{x_1}^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 - 4{x_2}^2$$
$$= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk sifat definit di dapatkan sebagai berikut

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$\text{Det}(\lambda I - A) = 0$$
$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$\text{Det}\begin{bmatrix} (\lambda+4) & 4 \\ 4 & (\lambda+4) \end{bmatrix} = 0$$
$$\big((\lambda+4)(\lambda+4)\big) - (4.4) = 0$$
$$\lambda^2 + 8\lambda = 0$$
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -8$$

Jadi, dari nilai eigen dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik diatas memiliki sifat semi definit negatif.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini membahas penyelesaian sistem kendali optimal dengan peningkatan barang. Dalam penelitian ini akan dilakukan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Diketahui pada Persamaan diferensial dinamik (2.13) untuk peningkatan barang sebagai berikut:

   $\dot{I} = P(t) + v(t)\,I(t)$

   Kemudian diketahui fungsi tujuan untuk kasus peningkatan barang pada Persamaan (2.15) sebagai berikut:

   $$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\square\left(I(t) - \hat{I}\right)^2 + K\left(P(t) - \hat{P}\right)^2 \right) dt$$

   Selanjutnya pada fungsi tujuan diberikan faktor diskon $e^{-\theta t}$.

   Sehingga Persamaan (2.15) menjadi :

   $$J = \frac{1}{2}\int_0^T e^{-\theta t} \left(\square\left(I(t) - \hat{I}\right)^2 + K\left(P(t) - \hat{P}\right)^2 \right) dt$$

2. Dibentuk Persamaan Hamilton berdasarkan Persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan pada langkah no 1.
3. Persamaan Hamilton yang diperoleh pada langkah no 2 dapat dibentuk Persamaan Lagrange.
4. Selanjutnya berdasarkan Persamaan Lagrange pada langkah no 3, ditentukan

   $\frac{-d}{dt}\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial I}L$ dan $\frac{\partial}{\partial P}\,L = 0$

5. Hasil pada langkah no 4 akan disubstitusikan pada dua kasus dibawah ini

   $P(t) + v(t)I(t) = 0$ dan $P(t) + v(t)I(t) > 0$

   Untuk memperoleh $\lambda(t)$.

6. Kemudian diferensialkan hasil pada langkah no 5.
7. Mengkombinasikan Persamaan yang didapat pada langkah no 5 dan no 6 berdasarkan Persamaan diferensial dinamik maka diperoleh Persamaan tingkat persediaan $I(t)$.

8. Mensubstitusikan $I(t_0) = I_0$ dan $I(t_1) = M$ ke Persamaan $I(t)$ pada langkah no 7 untuk menghitung konstanta a_1 dan a_2.
9. Kemudian mensubstitusikan Persamaan $I(t)$ ke Persamaan diferensial pada langkah no 1 untuk mendapatkan Persamaan tingkat produksi $P(t)$.
10. Persamaan yang diperoleh pada langkah no 7 dapat digunakan untuk menganalisa kestabilannya .

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan pada Bab IV maka diperoleh kesimpulan bahwa persamaan tingkat persediaan untuk masalah persediaan yang mengalami peningkatan yaitu:

$$I^*(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)$$

dimana a_1 dan a_2 sebagai berikut:

$$a_1 = \frac{b_1}{e^{m_1 t_0}} - \frac{e^{m_2 t_0}}{e^{m_1 t_0}} \left(\frac{b_1 e^{m_1 t_1} - b_2 e^{m_1 t_0}}{e^{m_2 t_0 + m_1 t_1} - e^{m_2 t_1 + m_1 t_0}} \right)$$

Dan

$$a_2 = \frac{b_1 e^{m_1 t_1} - b_2 e^{m_1 t_0}}{e^{m_2 t_0 + m_1 t_1} - e^{m_2 t_1 + m_1 t_0}}$$

Berdasarkan Persamaan diferensial dinamik dan Persamaan tingkat persediaan diperoleh Persamaan tingkat produksi yaitu:

$$P^*(t) = a_1 (m_1 - v(t)) e^{m_1 t} + a_2 (m_2 - v(t))\, e^{m_2 t} + \frac{d}{dt} Q(t) - v(t) Q(t)$$

Kemudian, dianalisa kestabilan sistem persediaan pada persamaan :

$$I^*(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)$$

Pada waktu $t_0 \rightarrow t_1$.

Dari Contoh 4.2 diperoleh tingkat persediaan awal (0) sampai (80) meningkat pada selang waktu (0) sampai (1), dimana untuk setiap t persediaan selalu mengalami kenaikan tanpa terdapat sedikitpun penurunan. Sehingga, tidak terjadi kekurangan barang pada perusahaan karena tingkat persediaan mengalami peningkatan yang stabil.

5.2 Saran

Tugas akhir ini menjelaskan tentang penerapan teori kendali pada masalah persediaan barang yang mengalami peningkatan untuk waktu berhingga. Sehingga, pembaca dapat mengembangkan dalam bentuk waktu tak berhingga.

DAFTAR PUSTAKA

Affandi, P dkk. "Kendali Optimal dari Sistem Inventory dengan Peningkatan dan Penurunan Barang". *Jurnal MIPA*. 79-88, 2015.

Affandi, P dkk. "Penerapan Teori Kendali pada Masalah Inventori". *Jurnal MIPA*. 38-46, 2012.

Daliani. "Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal Kontinu Yang Memuat Faktor Diskon". *Jurnal MIPA*. Vol. 2, pp. 157-161, 2012.

Kusuma, Hendra. 2009. *"Perencanaan dan Pengendalian Produksi Edisi 4"*. Yogyakarta : Penerbit Andi.

Lewis, Frank. L. 1995. "*Optimal Control"*. Toronto : John Wiley & Sons, Inc.

Maiza, J, S. "Model Linear Kuadratik untuk Sistem Deskriptor Berindek Satu dengan Faktor Diskon dan Output Feedback". *Skripsi Sains Matematika dan Statistik.* 2016.

Muhaijir, M, N. 2014. "*Persamaan Diferensial Biasa dengan MAPLE"*. Pekanbaru.

Nurrahmi, S dan Andiraja, N. "Kendali Optimal dari Sistem Persediaan dengan Penurunan Barang". *Skripsi Sains Matematika dan Statistik*, 2017.

Olsder, G.J. 1994. *"Mathematical Sistem Theory"*. Delft : University Of Technology.

Purcell, E. J dan Varbeg, D. 2015. "*Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 Edisi Kelima"*. Jakarta : Erlangga.

Shety S.P and Thompson G.L. 1985. "*Differential Equation 3 Edition"*. New York : John Wiley & Sons.

Syahfitri, E. *"*Aplikasi Teori Kendali pada Masalah Persediaan yang Mengalami Peningkatan Barang untuk Waktu Diskrit". *Skripsi Sains Matematika dan Statistik.* 2018.

Tadj, L dkk. "Optimal Control Of an Inventory System With Ameliorating and Deteriorating Items". *Applied Sciences*. Vol.10, pp. 243-255, 2008.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 23 Agustus 1996 di desa Marunggi, dusun Pasir Sigadondong, Kecamatan Pariaman Selatan, Kota Pariaman, Sumatera Barat, sebagai anak kedua dari pasangan Bapak Abuzar (Alm) dan Ibu Elvina. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar Negeri 14 Marunggi Kecamatan Pariaman Selatan, Kota Pariaman pada tahun 2009. Pada tahun 2012 penulis menyelesaikan Pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP N 9 Pariaman Kecamatan Pariaman Selatan, Kota Pariaman dan menyelesaikan Pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMA N 3 Pariaman tahun 2015 dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Pada tahun 2015 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika.

Pada tahun 2018, tepatnya pada semester VI penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Pariaman dengan judul **"Deskriptif Jumlah Curah Hujan di Kota Pariaman Tahun 2011-2015"** yang dibimbing oleh Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc dan Bapak Dedi Arman, S.ST dari tanggal 15 Januari sampai 15 Februari 2018 dan diseminarkan pada tanggal 07 Juni 2018. Selanjutnya pada tanggal 15 Juli 2018 sampai 3 September 2018 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Muara Langsat, Kecamatan Sentajo Raya, Kabupaten Kuantan Singingi.

Pada tanggal 15 November 2019 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir **"Kendali Optimal Sistem Persediaan Terhadap Peningatan Barang dengan Faktor Diskon"** di bawah bimbingan Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc.